



IV ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

1-4 класс

Санкт-Петербургский губернаторский
физико-математический лицей №30

Typ_1 - 4 класс



Typ_1 - 4 класс - решения

1. У Программи есть 3 карточки с цифрами 8, 3, 7. Какие числа больше 300, но меньше 600 он может составить из этих карточек?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).



Ответ: 378, 387. (Из этих трёх карточек можно составить такие трёхзначные числа: 378, 387, 738, 783, 837, 873. Но больше 300 и меньше 600 только два числа: 378, 387.)

2. Три спецагента: Боб, Майл и Джейми - провели 7 шпионских операций. В каждой операции участвовало двое. Боб принял участие в 3-х операциях, Джейми - в 6-ти. В скольких операциях принял участие Майл?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 5. (В каждой из семи операций участвовало двое. Значит, всего "участий" было $7+7=14$. У Боба было 3 "участия", у Джейми – 6. Значит, у Майлса "участий" было $14-3-6=5$.)

3. Сколько существует трёхзначных чисел, у которых любые две соседние цифры отличаются ровно на 7?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 5. (Ясно, что вторая цифра либо на 7 больше и первой, и третьей, либо на 7 меньше и первой, и третьей. То есть первая и последняя цифры совпадают. Есть три пары цифр, которые отличаются на 7: это 0 и 7, 1 и 8, 2 и 9. Значит, все такие трёхзначные числа - это 707, 818, 181, 929 и 292. То есть их 5.)

4. У Программи есть много тетрадок жёлтого и зелёного цвета, причём некоторые из этих тетрадок с передней стороны одного цвета, а с задней - другого. Программа подсчитал, что тетрадок с зелёной стороной 7, с жёлтой - 12, а тетрадок, у которых передняя и задняя стороны разного цвета, - 5. Сколько у Программи одноцветных тетрадей?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).





IV ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

1-4 класс

Санкт-Петербургский губернаторский
физико-математический лицей №30



Тип_1 - 4 класс

Ответ: 9. (Тетрадей с разноцветными сторонами 5, значит, эти 5 тетрадей вошли и в количество тетрадей с жёлтой стороной, и в количество тетрадей с зелёной стороной. Значит, полностью зелёных тетрадей $7-5=2$, а полностью жёлтых $12-5=7$. Тогда всего одноцветных тетрадей $2+7=9$.)

5. В Средиземье прошла встреча эльфов и гномов. Всего собралось 25 представителей. Эльф Леголас знаком с наименьшим количеством гномов - с 4-мя гномами. Эльф Галадриэль знакома с 5-ю гномами, эльф Линдир знаком с 6-ю, и так далее - каждый следующий эльф знает на 1 гнома больше. Последний эльф Трандуил знает всех гномов. Сколько гномов было на встрече?

Замечание: На встрече могли быть и другие эльфы, кроме приведенных в условии. В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 14. (1-ый эльф знает 4-х гномов. 2-ой эльф знает 5 гномов. Последний эльф знает всех гномов. В каждой фразе номер эльфа на 3 меньше, чем количество знакомых гномов. Значит, и номер последнего эльфа на 3 меньше, чем общее количество гномов. Значит, эльфов на 3 меньше, чем гномов.

Найдём количество эльфов. Временно вычтем 3-х "лишних" гномов: $25-3=22$. Теперь гномов и эльфов стало поровну. Значит, стало 11 эльфов и 11 гномов. Тогда гномов $11+3=14$.)

6. ПрограMiша и МатeMаша после школы ходят в один и тот же бассейн. Они идут по одной и той же дороге, но ПрограMiша доходит от школы до бассейна за 40 минут, а МатeMаша - за 50. Сегодня МатeMаша вышла из школы на 5 минут раньше ПрограMiши. Через сколько минут после своего выхода ПрограMiша догонит МатeMашу?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 20. (Весь путь ПрограMiша проходит за 40 минут. Значит, через 20 минут он будет ровно посередине между школой и бассейном.

МатeMаша вышла на 5 минут раньше. Значит, МатeMаша к этому моменту будет в пути уже $5+20=25$ минут. Она тратит на весь путь 50 минут. Значит, за 25 минут она пройдёт ровно половину пути и тоже будет ровно посередине между школой и бассейном.

Получается, что через 20 минут после выхода ПрограMiши они оба будут на середине пути, а значит, встретятся.)

7. Домики Аси, Баси, Васи, Маси и Туси расположены вдоль одной прямой дороги. Домик Баси находится посередине между домиками Маси и Туси. Домик Васи расположен посередине между домиками Аси и Маси. Домик Туси посередине между домиками Аси и Васи. Расстояние между домиками Баси и Васи равно 4 километра. Сколько километров между домиками Аси и Туси?





IV ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

1-4 класс

Санкт-Петербургский губернаторский
физико-математический лицей №30

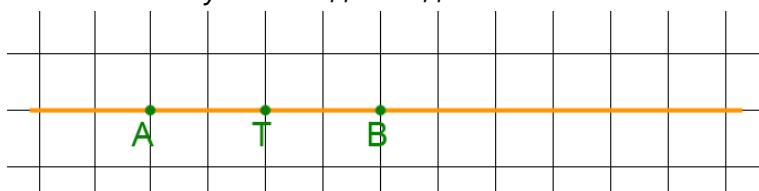


Тип_1 - 4 класс

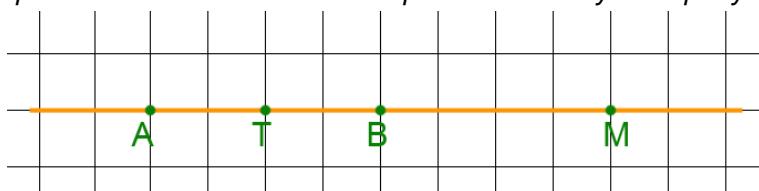
Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 8. (Для удобства будем делать чертёж на клетчатом листе. Изобразим дорогу и будем отмечать на ней домики: А - Аси, Т - Баси, В - Васи, М - Маси и Т - Туси.

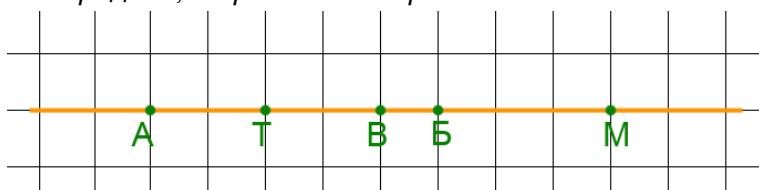
Начнём с условия "домик Туси посередине между домиками Аси и Васи". Отметим точки А и В - пусть это будут точки на расстоянии 4 клетки. Точки А и В пока можно расположить в любом порядке, поскольку пока на прямой ничего не было отмечено. Количество клеток тоже пока можно выбрать любое - связь клеток с расстояниями выясним позже. Посередине между точками А и В поставим точку Т - от Т до А и до В по 2 клетки.



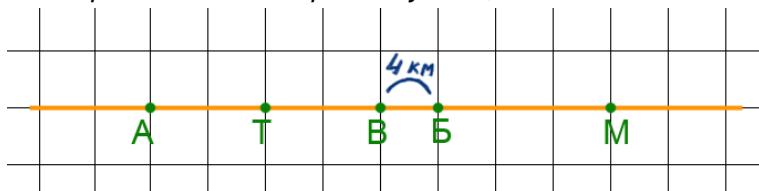
Теперь посмотрим на условие "домик Васи расположен посередине между домиками Аси и Маси". Домики Васи и Аси уже отмечены, между ними 4 клетки. Значит, точку М нужно поставить на расстоянии 4 клеток от В в противоположную сторону от А:



Затем из условия "домик Баси находится посередине между домиками Маси и Туси" найдём место для точки Б. Точки М и Т уже отмечены, между ними 6 клеток. Значит, Б нужно поставить ровно посередине, на расстоянии трёх клеток от М и от Т:



Получилось, что между В и Б одна клетка. Тогда из условия "Расстояние между домиками Баси и Васи равно 4 километра" получаем, что 1 клетка - это 4 километра.



А значит, расстояние от А до Т - это 2 клетки, то есть $4+4=8$ километров.)





IV ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

1-4 класс

Санкт-Петербургский губернаторский
физико-математический лицей №30



Тур_1 - 4 класс

8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды на острове прошли гоночные соревнования. В гонке приняло участие 10 пилотов. Каждый занял место от 1 до 10, одинаковых результатов не было. На следующий день журналист местной газеты спросил у участников, какое они заняли место. Каждый участник назвал какое-то место от 1 до 10. Журналист просуммировал названные места и получил сумму 30. Какое наименьшее количество лжецов могло участвовать в гонке?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 4. (Если бы все участники сказали правду, то сумма была бы $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$. Значит, несколько человек назвали более высокое место (то есть место с меньшим номером), чем заняли на самом деле. Максимальная разница, которая может быть между правдивым и ложным ответом - это $10-1=9$. Но $55-9=46$ - это всё равно больше, чем получилось у журналиста. Значит, были ещё лжецы среди участников.

Максимально возможная разница 9 могла быть только у одного участника (так как все участники заняли разные места). Следующая по величине возможная разница - это $9-1=8$. Но $46-8=38$ - это всё ещё больше, чем получилось у журналиста. Значит, лжецов не могло быть и двое.

Разница 8 также могла быть только у одного участника. Следующая по величине возможная разница - это $8-1=7$. Но $38-7=31$ - это больше, чем получилось у журналиста. Значит, был хотя бы один лжец. Значит, лжецов, участвовавших в гонке, не меньше 4. А такое могло быть, например, если лжецы, занявшие 10, 9 и 8 место, сказали, что они заняли 1 место, и ещё один лжец, занявший 7 место, сказал, что он занял 6 место (в остальные участники были рыцарями). Тогда сумма ответов $1+2+3+4+5+6+6+1+1+1=30$.)

9. В клетки таблицы 4x4 вписаны 16 различных натуральных чисел - по одному числу в каждую клетку. Сумма всех чисел в таблице равна 150. Программиша нашёл сумму чисел в каждом квадрате 3x3. Какова наименьшая возможная сумма этих четырёх сумм?

Замечание: В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 248. (4 числа в центре таблицы (которые выделены жёлтым цветом) участвуют в четырёх суммах, 8 чисел по краям доски (которые выделены зелёным цветом) – в двух суммах, и 4 числа в углах доски – в какой-то одной сумме.

1	2	2	1
2	4	4	2
2	4	4	2
1	2	2	1



IV ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

1-4 класс

Санкт-Петербургский губернаторский
физико-математический лицей №30



Тип_1 - 4 класс

То есть чтобы получить итоговую сумму, нужно к 150 (к сумме всех чисел в таблице) добавить ещё одну сумму зелёных чисел и утроенную сумму жёлтых чисел. Результат будет минимальным, если сначала сделать минимально возможными жёлтые числа (это 1, 2, 3 и 4), а затем минимально возможными зелёные числа (это следующие 8 натуральных чисел: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12). В этом случае результат будет такой: $150 + (1+2+3+4)*3 + 5+6+7+8+9+10+11+12 = 248$.)

10. Программиша решил, что будет брать семизначные номера телефонов, воспринимать знак «-» как минус и считать, какой получится результат. Например, у друга Васи номер телефона 555-30-03, и у Программиши получилось $555-30-03=522$ (03 Программиша считает как число 3). Сколько существует номеров телефонов, для которых в результате получится 0?

Замечание: Считаем, что первая цифра номера телефона от 1 до 9, остальные цифры могут быть любые, то есть от 0 до 9. В ответе укажите только число (или несколько чисел через запятую).

Ответ: 4950. (Программиша из первого трёхзначного числа вычитает два двузначных. Чтобы получился 0, нужно, чтобы сумма двух двузначных чисел оказалась равна первому трёхзначному числу. Выясним, в каких случаях такое может произойти.

Сначала выясним, какие варианты есть для первого трёхзначного числа. Каждое двузначное число может быть от 0 (00) до 99. Значит, сумма двух таких чисел может быть от $0+0=0$ до $99+99=198$.

Значит, в итоге может получить 0 только в тех случаях, когда первое трёхзначное число от 100 (меньше не может быть по условию) до 198.

Пусть первое число 100. Тогда два двузначных числа в сумме должны давать 100. А каждое двузначное число может быть от 0 (00) до 99. Вот возможные варианты получить в сумме 100: $100=99+1=98+2=97+3=\dots=2+98=1+99$ - всего 99 вариантов. То есть с первым числом в номере телефона 100 подходящих номеров телефонов 99.

Если первое число 101, то подойдут варианты: $101=99+2=98+3=97+4=\dots=2+99$ - 98 вариантов.

Если первое число 102, то получим 97 вариантов номера телефона: $102=99+3=98+4=\dots=3+99$.

Для первого числа 103 получим 96 вариантов: $103=99+4=98+5=\dots=4+99$.

И дальше количество вариантов каждый раз будет становиться на 1 меньше. В конце, для первого числа в номере 198 получим всего 1 вариант: $198=99+99$.

Значит, всего подходящих номеров телефона $99+98+97+\dots+1$. Осталось вычислить эту сумму.

Её удобнее считать не по порядку, а разбив числа на пары: первое и последнее, второе и предпоследнее, и т.д.:

$$(99+1)+(98+2)+(97+3)+\dots+(51+49)+50.$$

Всего чисел было 99, одно число 50 осталось без пары, то есть пар $98:2=49$. В каждой паре сумма равна 100, то есть общая сумма $100*49+50=4950$. Итого, 4950 номеров телефонов, для которых после Программишного вычитания получится в результате 0.)

